

**SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA**

Enrico Obrecht

**PERTURBAZIONI SINGOLARI DI EQUAZIONI
DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE
IN UNO SPAZIO DI BANACH**

21 maggio 1992

In questo seminario intendo esporre alcuni risultati relativi a equazioni differenziali del secondo ordine in uno spazio di Banach, in cui un parametro piccolo moltiplica la derivata seconda; ovviamente il punto interessante è il legame fra soluzione del problema con parametro e soluzione del problema limite.

Un'ampia monografia per problemi di vario tipo di perturbazioni singolari di equazioni a derivate parziali è quella di J.L. Lions [5].

Nel seguito mi sono limitato a trattare problemi per i quali l'equazione limite è di tipo parabolico o di Schrödinger; in effetti esistono anche risultati quando l'equazione limite è di tipo iperbolico, ma mi sembra che, in questo caso, le tecniche operatoriali si prestino meno bene a descrivere i risultati.

1. Perturbazione singolare parabolica

Le piccole oscillazioni di una membrana fissata sul bordo e immersa in un mezzo a elevata viscosità possono essere descritte dall'equazione

$$\rho v_{tt} + \gamma v_t = \sigma \Delta v ,$$

dove $v(x,t)$ rappresenta lo spostamento verticale nel punto $x \in \Omega$ al tempo t , mentre ρ , γ , σ sono, rispettivamente, la densità superficiale, il coefficiente di viscosità e la tensione della membrana. Inoltre v soddisfa la condizione al contorno

$$v(x,t) = 0 , \quad \forall x \in \partial\Omega \times [0,T] ,$$

e le condizioni iniziali

$$v(x,0) = u_0(x) , \quad v_t(x,0) = u_1(x) , \quad \forall x \in \Omega .$$

Effettuando il cambiamento di funzione incognita

$$v(x,t) = u(x, \frac{\sigma}{\gamma} t) ,$$

la funzione u sarà soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{\sigma\rho}{\gamma^2} u_{tt} + u_t = \Delta u , & \text{in } \Omega \times [0,T], \\ u(x,t) = 0, & \text{in } \partial\Omega \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x) , \quad u_t(x,0) = \frac{\gamma}{\sigma} u_1(x) , & \text{in } \Omega . \end{cases}$$

Ponendo $\varepsilon = \frac{\sqrt{\sigma\rho}}{\gamma}$, l'equazione precedente diventa

$$\varepsilon^2 u_{tt} + u_t = \Delta u ,$$

dove ε è piccolo e positivo, se il coefficiente di viscosità è elevato, mentre la seconda condizione iniziale viene a dipendere da ε :

$$u_t(x,0) = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}} u_1(x) .$$

Con questa motivazione fisica, considererò il problema di Cauchy in uno spazio di Banach X

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 u_\varepsilon'' + u_\varepsilon' = Au_\varepsilon + f_\varepsilon(t), & t \geq 0, \\ u_\varepsilon(0) = u_0(\varepsilon), u_\varepsilon'(0) = u_1(\varepsilon), \end{cases}$$

dove A è un operatore lineare in X . Esaminerò, in particolare, anche il comportamento della soluzione – generalizzata e stretta – del problema (1) per $\varepsilon \rightarrow 0+$, con particolare riguardo alla sua eventuale convergenza alla soluzione del problema limite

$$(2) \quad \begin{cases} z' = Az + f(t), & t \geq 0, \\ z(0) = u_0. \end{cases}$$

Cominciamo con l'esaminare condizioni che garantiscano che il problema (1) è ben posto. A tal fine ricordo che una funzione coseno astratta \mathfrak{C} è una funzione fortemente continua da \mathbb{R} a $\mathfrak{L}(X)$, tale che

$$\mathfrak{C}(t+s) + \mathfrak{C}(t-s) = 2\mathfrak{C}(t)\mathfrak{C}(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R};$$

viene detto generatore infinitesimale di \mathfrak{C} l'operatore A , definito da

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h^2} (\mathfrak{C}(h) - I)x,$$

avente per dominio l'insieme degli $x \in X$, per i quali tale limite esiste. E' ben noto che il problema di Cauchy

$$(3) \quad \begin{cases} u'' = Au, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \end{cases}$$

dove A è un operatore lineare in X , è ben posto se, e solo se, A è il generatore di una funzione coseno astratta \mathfrak{C} ; in tal caso, se $u_0, u_1 \in \mathfrak{D}(A)$, il problema ha come unica soluzione

$$(4) \quad u(t) = \mathfrak{C}(t)u_0 + \mathfrak{A}(t)u_1,$$

dove $\mathfrak{A}(t) = \int_0^t \mathfrak{C}(s)x \, ds$ è la funzione seno associata a \mathfrak{C} . Se u_0 oppure u_1 non appartengono a $\mathfrak{D}(A)$, la funzione u , definita dalla (4), viene detta soluzione generalizzata del problema (3). Si può mostrare che, se \mathfrak{C} è una funzione coseno astratta, esistono $C, \omega \in \mathbb{R}$, tali che

$$(5) \quad \|\mathfrak{C}(t)\| \leq C \cosh(\omega t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se A è il generatore di una funzione coseno, allora esso è anche il generatore del semigrupp

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) \mathfrak{C}(s)x \, ds ,$$

che risulta essere analitico nel semipiano $\operatorname{Re} z > 0$ e per il quale vale la stima

$$\|S(t)\| \leq C e^{\omega^2 t}, \quad \forall t \geq 0 .$$

Ritorniamo ora ai problemi (1) e (2). Se supponiamo, come faremo sempre nel seguito, che A sia il generatore di una funzione coseno \mathfrak{C} , il problema limite risulta quindi essere ben posto. Mostriamo ora che è ben posto anche il problema (1) con $\varepsilon > 0$. A tal fine, ponendo

$$v_\varepsilon(t) = \exp\left(\frac{t}{2\varepsilon}\right) u_\varepsilon(\varepsilon t) ,$$

il problema (1) si trasforma nel seguente

$$(6) \quad \begin{cases} v_\varepsilon'' = \left(A + \frac{1}{4\varepsilon^2} I\right) v_\varepsilon + \exp\left(\frac{t}{2\varepsilon}\right) f_\varepsilon(\varepsilon t) , & t \geq 0 , \\ v_\varepsilon(0) = u_0(\varepsilon) , \quad v_\varepsilon'(0) = \frac{1}{2\varepsilon} u_0(\varepsilon) + \varepsilon u_1(\varepsilon) . \end{cases}$$

Il problema (5) è ben posto, per il risultato seguente, ottenuto da Sova [7].

PROPOSIZIONE 1. Siano A il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta e $b \in \mathfrak{C}$. Allora il problema di Cauchy

$$(7) \quad \begin{cases} w'' = (A + b^2 I) w , \\ w(0) = w_0 , \\ w'(0) = w_1 , \end{cases}$$

è ben posto e, se $w_0, w_1 \in \mathfrak{D}(A)$, la soluzione del problema (7) è

$$w(t) = \mathfrak{C}_b(t) w_0 + \mathfrak{A}_b(t) w_1 ,$$

dove

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_b(t)x &= \mathfrak{C}(t)x + bt \int_0^t \frac{I_1(b\sqrt{t^2-s^2})}{\sqrt{t^2-s^2}} \mathfrak{C}(s)x \, ds , \\ \mathfrak{A}_b(t)x &= \int_0^t I_0(b\sqrt{t^2-s^2}) \mathfrak{C}(s)x \, ds ; \end{aligned}$$

qui con \mathfrak{C} si è indicata la funzione coseno astratta generata da A , mentre I_0 e I_1 sono le funzioni di Bessel modificate di ordine 0 e 1, rispettivamente, definite da

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} ,$$

$$I_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! (n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}.$$

Da questo risultato si ricava che il problema (1) è ben posto e che, se $u_0(\varepsilon)$, $u_1(\varepsilon) \in \mathcal{D}(A)$, la sua soluzione è

$$(8) \quad u_\varepsilon(t) = \exp\left(-\frac{t}{2\varepsilon^2}\right) \mathfrak{C}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) u_0(\varepsilon) + K_\varepsilon(t) \left(\frac{1}{2} u_0(\varepsilon)\right) + \\ + \Sigma_\varepsilon(t) \left(\frac{1}{2} u_0(\varepsilon) + \varepsilon^2 u_1(\varepsilon)\right) + \int_0^t \Sigma_\varepsilon(t-s) f_\varepsilon(s) ds,$$

dove

$$K_\varepsilon(t)x = \frac{t \exp\left(-\frac{t}{2\varepsilon^2}\right)}{\varepsilon^2} \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \left(\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2 - s^2\right)^{-1/2} I_1\left(\frac{\sqrt{(t/\varepsilon)^2 - s^2}}{2\varepsilon}\right) \mathfrak{C}(s)x ds \equiv \\ \equiv \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \phi_\varepsilon(t,s) \mathfrak{C}(s)x ds,$$

$$\Sigma_\varepsilon(t)x = \frac{\exp\left(-\frac{t}{2\varepsilon^2}\right)}{\varepsilon} \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} I_0\left(\frac{\sqrt{(t/\varepsilon)^2 - s^2}}{2\varepsilon}\right) \mathfrak{C}(s)x ds \equiv \\ \equiv \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \psi_\varepsilon(t,s) \mathfrak{C}(s)x ds.$$

Pertanto, nelle ipotesi fatte, sia il problema (1) sia il problema (2) sono ben posti. Cominciamo con l'esaminare il problema della convergenza della soluzione, esaminando il problema omogeneo ($f_\varepsilon \equiv 0$).

Utilizzando la formula (8), che definisce una soluzione generalizzata del problema (1), qualunque siano i dati iniziali, e la stima (5) per la funzione coseno astratta, si ottiene la seguente maggiorazione, valida per ogni soluzione generalizzata del problema (1):

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \|u_\varepsilon(t)\| &\leq C \exp\left(-\frac{t}{2\varepsilon^2}\right) \cosh\left(\frac{\omega t}{\varepsilon}\right) \|u_0(\varepsilon)\| + \\
 &+ C \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \Phi_\varepsilon(t,s) \cosh(\omega s) \frac{1}{2} \|u_0(\varepsilon)\| ds + \\
 &+ C \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \Psi_\varepsilon(t,s) \cosh(\omega s) \left(\frac{1}{2} \|u_0(\varepsilon)\| + \varepsilon^2 \|u_1(\varepsilon)\|\right) ds.
 \end{aligned}$$

Poiché $\cosh(\omega t)$ è una funzione coseno astratta in \mathbb{C} con generatore ω^2 , il secondo membro della (9) è la soluzione del problema scalare

$$(10) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 \xi_\varepsilon'' + \xi_\varepsilon' = \omega^2 \xi_\varepsilon, \\ \xi_\varepsilon(0) = \|u_0(\varepsilon)\|, \quad \xi_\varepsilon'(0) = \|u_1(\varepsilon)\|. \end{cases}$$

Scrivendo esplicitamente la soluzione del problema (10), si ottiene la stima

$$(11) \quad \|u_\varepsilon(t)\| \leq C e^{\omega^2 t} (\|u_0(\varepsilon)\| + \varepsilon^2 \|u_1(\varepsilon)\|),$$

valida $\forall u_0(\varepsilon), u_1(\varepsilon) \in X$, cioè per le soluzioni generalizzate del problema (1) nel caso omogeneo.

Esaminiamo ora la convergenza di u_ε a z , soluzione del problema parabolico (2) nel caso omogeneo. Si ha:

$$(12) \quad u_\varepsilon(t) - z(t) = (\Phi_\varepsilon(t) - S(t)) u_0 + \Phi_\varepsilon(t)(u_0(\varepsilon) - u_0) + \Psi_\varepsilon(t) u_1(\varepsilon),$$

dove $\Phi_\varepsilon(t)$ e $\Psi_\varepsilon(t)$ sono gli operatori di evoluzione associati al problema (1), tali cioè che

$$u_\varepsilon(t) = \Phi_\varepsilon(t) u_0(\varepsilon) + \Psi_\varepsilon(t) u_1(\varepsilon),$$

e $S(t)$ è il semigrupp analitico generato da A . Utilizzando la stima (11), si ottiene

$$\|\Phi_\varepsilon(t)(u_0(\varepsilon) - u_0)\| \leq C e^{\omega^2 t} \|u_0(\varepsilon) - u_0\|,$$

$$\|\Psi_\varepsilon(t) u_1(\varepsilon)\| \leq C \varepsilon^2 e^{\omega^2 t} \|u_1(\varepsilon)\|.$$

E' invece tecnicamente piuttosto complicato stimare il primo termine al secondo membro della (12); per farlo è opportuno supporre che $u_0 \in \mathcal{D}(A)$. Si ottiene alla fine il seguente risultato di Kisynski [4].

TEOREMA 2. Sia A il generatore infinitesimale della funzione coseno astratta \mathfrak{C} , che verifica la disuguaglianza $\|\mathfrak{C}(t)\| \leq C \cosh(\omega t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$; allora, se u_ε è la soluzione generalizzata del problema (1) nel caso omogeneo e se z è la soluzione stretta del problema (2) nel caso omogeneo, si ha, $\forall u_0 \in \mathcal{D}(A)$, $\forall u_0(\varepsilon), u_1(\varepsilon) \in X$:

$$(13) \quad \|u_\varepsilon(t) - z(t)\| \leq C e^{\omega^2 t} (\|u_0(\varepsilon) - u_0\| + \varepsilon^2 (1 + \omega^2 t) \|A u_0\| + \varepsilon^2 \|u_1(\varepsilon)\|), \quad \forall t \geq 0.$$

Da ciò segue che u_ε converge a z , uniformemente sui compatti di $[0, +\infty[$, se

$$u_0(\varepsilon) \rightarrow u_0 \text{ e } \varepsilon^2 u_1(\varepsilon) \rightarrow 0.$$

In realtà, come ha mostrato Fattorini [2], la convergenza uniforme sui compatti si può ottenere anche senza l'ipotesi che $u_0 \in \mathfrak{D}(A)$; però, in assenza di tale ipotesi ulteriore, viene a cadere la precisa stima (13).

Rafforzando le ipotesi sui dati iniziali, Kisynski [4] ha ottenuto anche una stima sulle derivate.

TEOREMA 3. Nelle ipotesi del Teorema 2, se $u_0 \in \mathfrak{D}(A^2)$, $u_0(\varepsilon) \in \mathfrak{D}(A)$, $u_1(\varepsilon) \in X$, si ha:

$$\|u_\varepsilon'(t) - z(t)\| \leq C e^{\omega^2 t} (\varepsilon^2 (1 + \omega^2 t) \|A^2 u_0\| + \|u_1(\varepsilon) - Au_0\| + \|u_1(\varepsilon) - Au_0(\varepsilon)\|), \forall t \geq 0.$$

Di qui segue la convergenza uniforme delle derivate sui compatti se

$$u_1(\varepsilon) \rightarrow Au_0, \quad Au_0(\varepsilon) \rightarrow Au_0.$$

Anche in questo caso, risultati meno precisi, ma sotto ipotesi meno restrittive, sono stati ottenuti da Fattorini [2].

I risultati precedenti non garantiscono però che la convergenza sia uniforme al variare delle condizioni iniziali in un sottoinsieme limitato dello spazio nel quale vengono assegnate.

Infatti, sia $X = \ell^2$, A l'operatore tale che

$$\mathfrak{D}(A) = \left\{ u = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid \{n^2 u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \right\},$$

$$Au = \{-n^2 u_n\}_{n \in \mathbb{N}};$$

è immediato riconoscere che A genera la funzione coseno astratta \mathfrak{C} , definita da

$$\mathfrak{C}(t)u = \{\cos(nt) u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

e il semigruppone analitico S , definito da

$$S(t)u = \{e^{-n^2 t} u_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Siano u_ε la soluzione del problema

$$(14) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 u_\varepsilon'' + u_\varepsilon' - Au_\varepsilon = 0, \\ u_\varepsilon(0) = v, \quad u_\varepsilon'(0) = 0, \end{cases}$$

dove $v \in \ell^2$ è indipendente da ε , e z è la soluzione del problema

$$\begin{cases} z' = Az, \\ z(0) = v. \end{cases}$$

Se $v = \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, è evidente che

$$z(t) = \{e^{-n^2 t} v_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Fissiamo $b \in]0, 1[$ e poniamo, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_m = \frac{b}{2m}$. Consideriamo l'equazione caratteristica della componente m -esima dell'equazione

$$\varepsilon_m^2 u_\varepsilon'' + u_\varepsilon' - Au_\varepsilon = 0,$$

cioè

$$\varepsilon_m^2 \lambda^2 + \lambda + m^2 = 0 ;$$

essa possiede due radici distinte

$$\lambda_m^\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - b^2}}{2\varepsilon_m^2} .$$

Pertanto, la componente m -esima della soluzione del problema (14) con $\varepsilon = \varepsilon_m$ è

$$(u_{\varepsilon_m}(t))_m = \frac{v_m}{2\sqrt{1-b^2}} \left((\sqrt{1-b^2} + 1) \exp\left(\frac{-1 + \sqrt{1-b^2}}{2\varepsilon_m^2} t\right) + \right. \\ \left. + (\sqrt{1-b^2} - 1) \exp\left(-\frac{1 + \sqrt{1-b^2}}{2\varepsilon_m^2} t\right) \right) ,$$

mentre

$$(z(t))_m = e^{-m^2 t} v_m .$$

Sia $\{t_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una successione in \mathbb{R}^+ , tale che

$$\frac{t_m}{\varepsilon_m^2} \rightarrow +\infty ;$$

passando eventualmente a una sottosuccessione, possiamo supporre che

$$\frac{t_m}{\varepsilon_m^2} \rightarrow a$$

e supponiamo, di più, che $a > 0$; allora

$$\|u_{\varepsilon_m}(t_m) - z(t_m)\| \geq |(u_{\varepsilon_m}(t_m))_m - (z(t_m))_m| = \\ = \left| \frac{1}{2} (1-b^2)^{-1/2} \left((\sqrt{1-b^2} + 1) \exp\left(\frac{(-1 + \sqrt{1-b^2})}{2} a\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\sqrt{1-b^2} - 1) \exp\left(-\frac{1 + \sqrt{1-b^2}}{2} a\right) \right) \right| |v_m| (1 + o(1)) ,$$

il che esclude la convergenza uniforme sui limitati.

Per ovviare alle limitazioni illustrate dall'esempio precedente, Fattorini [2] ha utilizzato un tipo di stime diverso, che consente di ottenere la convergenza uniforme al variare dei dati iniziali in un sottoinsieme limitato di X , purché si escluda uno "strato limite" vicino a zero. Cominciamo col dare una definizione precisa di questo tipo di convergenza.

DEFINIZIONE. Siano $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una funzione limitata, $\{g_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ una famiglia di funzioni da $[0, +\infty[$ a X e $g : [0, +\infty[\rightarrow X$. Diremo che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} g_\varepsilon = g$, uniformemente sui compatti di $[\rho(\varepsilon), +\infty[$ se $\forall a > \sup \rho$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{t \in [\rho(\varepsilon), a]} \|g_\varepsilon(t) - g(t)\| = 0 .$$

Utilizzando questo tipo di convergenza, Fattorini [2] ha ottenuto i risultati seguenti.

TEOREMA 4. Sia $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una funzione limitata, tale che

$$(15) \quad \frac{\rho(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} +\infty ;$$

allora

$$K_\varepsilon(t)x \rightarrow S(t)x, \quad \Sigma_\varepsilon(t)x \rightarrow S(t)x,$$

per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, uniformemente sui compatti di $[\rho(\varepsilon), +\infty[$, uniformemente al variare di x nei limitati di X . Con $S(t)$ si è qui indicato il semigruppato analitico generato da A .

Vogliamo ora dare un'idea della dimostrazione. Ricordando che

$$K_\varepsilon(t)x = \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} \phi_\varepsilon(t,s) \mathfrak{C}(s)x \, ds,$$

dove

$$\phi_\varepsilon(t,s) = \varepsilon^{-2} t \exp\left(-\frac{t}{2\varepsilon^2}\right) \frac{I_1(\sqrt{(t/\varepsilon)^2 - s^2/(2\varepsilon)})}{\sqrt{(t/\varepsilon)^2 - s^2}}$$

e \mathfrak{C} è la funzione coseno astratta generata da A , è necessario avere delle informazioni precise sul comportamento di I_1 . Quando s è molto vicino a $\frac{t}{\varepsilon}$, si possono utilizzare

stime abbastanza rozze, del tipo

$$\frac{I_1(y)}{y} \leq C \frac{e^y}{(2+y)^{3/2}};$$

ciò però è proficuo solo in un intervallo di lunghezza piccola, collegata all'ampiezza $\rho(\varepsilon)$ dello strato limite, regolato dalla (15); fuori da questo strato, si può invece utilizzare lo sviluppo asintotico per $y \rightarrow +\infty$ e cioè

$$I_1(y) = \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}} \left(1 + O\left(\frac{1}{y}\right)\right).$$

Per mezzo di queste stime, Fattorini [2] ha potuto dimostrare i seguenti risultati di convergenza delle soluzioni.

TEOREMA 5. Siano $u_0(\varepsilon), u_1(\varepsilon) \in X$, tali che

$$u_0(\varepsilon) \rightarrow v, \quad u_1(\varepsilon) \rightarrow u_0 - v, \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0^+,$$

$\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una funzione limitata, tale che

$$\frac{\rho(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} +\infty.$$

Allora la soluzione generalizzata u_ε del problema (1) nel caso omogeneo converge, uniformemente sui compatti di $[\rho(\varepsilon), +\infty[$, alla soluzione del problema

$$\begin{cases} z' = Au \\ z(0) = u_0 \end{cases}$$

La convergenza è anche uniforme rispetto a u_0 e a v , se questi variano in un limitato di X .

Di recente, Engel [1] ha studiato un'equazione più generale, e cioè

$$\varepsilon u_\varepsilon'' + Bu_\varepsilon' + Au_\varepsilon = 0,$$

dove B è un opportuno operatore limitato. Il risultato più significativo è il seguente.

TEOREMA 6. Siano A il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta \mathfrak{C} , B un operatore limitato che commuta con $\mathfrak{C}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, e tale che

$$s(B) \equiv \sup \{ \operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(B) \} < 0,$$

$u_0, u_1 \in \mathcal{D}(A)$. Allora il problema

$$(16) \quad \begin{cases} u_\varepsilon'' + 2Bu_\varepsilon' - Au_\varepsilon = 0, \\ u_\varepsilon(0) = u_0, u_\varepsilon'(0) = u_1, \end{cases}$$

è ben posto, AB^{-1} genera un semigruppato analitico e la soluzione u_ε del problema (16) converge, per $\varepsilon \rightarrow 0+$, alla soluzione del problema

$$\begin{cases} 2Bz' = Az, \\ z(0) = u_0. \end{cases}$$

La dimostrazione è basata sulla possibilità di fornire una rappresentazione esplicita della soluzione del problema (16), basata sulle funzioni di Bessel modificate di un operatore limitato.

Passiamo ora a considerare il caso di un'equazione non omogenea, ma con condizioni iniziali omogenee. In questo caso i risultati sono però meno numerosi e precisi del caso precedente. Un risultato tipico, dovuto a Fattorini [2] è il seguente.

TEOREMA 7. Siano $f_\varepsilon, f \in \mathcal{C}^\alpha([0, T]; X)$, tali che $f_\varepsilon \rightarrow f$ nella topologia di $\mathcal{C}^\alpha([0, T]; X)$; allora la soluzione generalizzata u_ε del problema (1) con condizioni iniziali nulle converge, uniformemente in $[0, T]$, alla soluzione z del problema (2) con condizioni iniziali nulle e, di più,

$$u_\varepsilon'(t) - \Sigma_\varepsilon(t)f(0) \rightarrow z'(t) - S(t)f(0),$$

uniformemente in $[0, T]$.

Osservo che il risultato sulla convergenza delle derivate deve contenere un termine correttivo se $f(0) \neq 0$, in quanto

$$u_\varepsilon'(0) = 0, \forall \varepsilon > 0,$$

mentre

$$z'(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} z'(t) = Az(0) + f(0) = f(0).$$

2. Perturbazione singolare di tipo Schrödinger

In meccanica quantistica relativistica si considera l'equazione

$$(17) \quad \frac{\hbar}{2mc^2} u_{tt} - iu_t = \frac{\hbar}{2m} \Delta u,$$

dove m è la massa della particella e c è la velocità della luce; tale equazione si ricava ponendo

$$u(x,t) = \exp\left(i \frac{mc^2}{\hbar} t\right) v(x,t)$$

nell'equazione di Klein-Gordon per una particella libera

$$-\hbar^2 v_{tt} = -\hbar^2 c^2 \Delta v + m^2 c^4 v.$$

Poiché il coefficiente di u_{tt} nella (17) è molto piccolo, è interessante esaminare se le soluzioni di (17) approssimano quelle dell'equazione limite.

Se traduciamo questo problema in termini operatoriali, siamo condotti a considerare i problemi

$$(18) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 u_\varepsilon'' - i u_\varepsilon' = A u_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(0) = u_0(\varepsilon), u_\varepsilon'(0) = u_1(\varepsilon), \end{cases}$$

$$(19) \quad \begin{cases} z' = iAz, \\ z(0) = u_0. \end{cases}$$

Ovviamente il problema (18) è ben posto $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ se A è il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta e, in tal caso, si può scriverne la soluzione esplicitamente in una forma analoga alla (8), purché si sostituiscano a t e a ε , rispettivamente, $i\varepsilon$ e $i\varepsilon$. Naturalmente, le funzioni di Bessel modificate avranno ora argomento immaginario e coincideranno quindi con le funzioni di Bessel usuali, il cui comportamento asintotico è completamente diverso da quello delle precedenti. Si noti poi che il termine che nella (8) aveva la forma

$$\exp\left(-\frac{t}{2\varepsilon^2}\right) \mathfrak{C}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) u_0(\varepsilon)$$

ora diventa

$$\exp\left(i\frac{t}{2\varepsilon^2}\right) \mathfrak{C}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) u_0(\varepsilon).$$

Inoltre, mentre nel caso precedente il problema limite era ben posto, ora non vi è motivo perché, in generale, iA generi un semigruppato. Questo problema è stato trattato inizialmente da Veselic ([8],[9]) e da Schoene ([6]), supponendo che X sia uno spazio

di Hilbert e che A sia autoaggiunto. Questo, come è ben noto, fa sì che il problema (19) sia ben posto. Successivamente, Fattorini [3] ha generalizzato i loro risultati, supponendo che A sia il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta in uno spazio di Banach, sottoposto però a un'ulteriore restrizione. Nel seguito illustrerò alcuni dei suoi risultati.

Se u_ε è la soluzione del problema (18), essa può essere scritta, poiché il problema è ben posto, come

$$u_\varepsilon(t) = R_\varepsilon(t)u_0(\varepsilon) + T_\varepsilon(t)u_1(\varepsilon),$$

almeno se $u_0(\varepsilon), u_1(\varepsilon) \in \mathcal{D}(A)$; osserviamo però che gli operatori $R_\varepsilon(t)$ e $T_\varepsilon(t)$ appartengono a $\mathcal{L}(X)$. Ebbene, richiediamo che:

IPOTESI AGGIUNTIVA. Siano A il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta, R_ε e T_ε gli operatori di evoluzione del problema (18). Supponiamo che esistano C_1, C_2, ω , indipendenti da ε e da t , tali che:

$$\|R_\varepsilon(t)\| \leq C_1 e^{\omega|t|}, \|T_\varepsilon(t)\| \leq C_2 e^{\omega|t|}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Prima di illustrare i risultati ottenibili con l'ipotesi precedente, vediamo alcuni esempi che ne chiariscono il campo di applicabilità.

PROPOSIZIONE 8. Siano X uno spazio di Hilbert e A il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta uniformemente limitata in X ; allora A verifica l'ipotesi aggiuntiva.

Un risultato che chiarifica ulteriormente il significato dell'ipotesi aggiuntiva è il seguente.

Se X è uno spazio di Hilbert e A è un operatore normale in X , allora A genera una funzione coseno astratta \mathfrak{C} che verifica la stima

$$\|\mathfrak{C}(t)\| \leq C \cosh(\omega t), \forall t \in \mathbb{R},$$

se, e solo se,

$$\sigma(A) \subseteq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda \leq \omega^2 - \frac{(\operatorname{Im} \lambda)^2}{4\omega^2} \right\}.$$

Ebbene A verifica l'ipotesi aggiuntiva se, e solo se, $\exists a, b \in \mathbb{R}^+$, tali che

$$\sigma(A) \subseteq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda \leq a, \|\operatorname{Im} \lambda\| \leq b \right\}.$$

Un primo risultato significativo, ottenuto come conseguenza dell'ipotesi aggiuntiva, è il seguente.

TEOREMA 9. Sia A il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta; se A verifica l'ipotesi aggiuntiva, allora iA genera un gruppo fortemente continuo.

Questo risultato garantisce quindi che anche il problema limite è ben posto.

Enuncio ora due dei risultati ottenuti da Fattorini [3] per la convergenza delle soluzioni generalizzate.

TEOREMA 10. Siano A il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta, verificante l'ipotesi aggiuntiva, $u_0 \in \mathcal{D}(A^2)$, $u_0(\varepsilon), u_1(\varepsilon) \in X$. Allora, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\|u_\varepsilon(t) - z(t)\| \leq C e^{\omega|t|} (\|u_0(\varepsilon) - u_0\| + \varepsilon^2 (\|Au_0\| + |t| \|A^2u_0\| + \|u_1(\varepsilon)\|)),$$

dove u_ε è la soluzione generalizzata del problema (18) e z è la soluzione generalizzata del problema (19).

TEOREMA 11. Se A verifica le ipotesi del Teorema 10, $u(\varepsilon), u_1(\varepsilon), u_0 \in X$ e se

$$u_0(\varepsilon) \rightarrow u_0, \varepsilon^2 u_1(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0+,$$

allora u_ε converge uniformemente a z sui compatti di \mathbb{R} .

BIBLIOGRAFIA

- [1] K.-J. ENGEL: On Singulr Perturbations of Second Order Cauchy Problems, Pacific J. Math., **152** (1992), pp. 79-91
- [2] H.O.FATTORINI: Singular Perturbation and Boundary Layer for an Abstract Cauchy Problem, J. Math. Anal. Appl., **97** (1983), pp. 529-571
- [3] H.O.FATTORINI: On the Schrödinger Singular Perturbation Problem, SIAM J. Math. Anal., **16** (1985), pp. 1000-1019
- [4] J. KISYNSKI: On Second Order Cauchy's Problem in a Banach Space, Bull. Accad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math., **18** (1970), pp. 371-374
- [5] J.-L. LIONS: Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal, Lecture Notes in Math., n. 323, Springer (1973)
- [6] A.Y.SCHOENE: Semi-Groups and a Class of Singular Perturbations Problems, Indiana Univ. Math. J., **20** (1970), pp. 247-264
- [7] M. SOVA: Perturbations numériques des évolutions parabolique et hyperbolique, Casopis Pest. Mat., **96** (1971), pp. 406-425
- [8] K. VESELIC: The Nonrelativistic Limit of the Dirac Equation and Spectral Concentration, Glas. Mat., **24** (1969), pp. 231-241
- [9] K. VESELIC: On the Nonrelativistic Limit of the Bound States of the Klein-Gordon Equation, J. Math. Anal. Appl., **96** (1983), pp. 63-84